PREUNIVERSITARIO PREUTECH
DEPTO. MATEMÁTICA.

CURSO: MATEMÁTICA. EJE TEMÁTICO: NÚMEROS

APUNTES COMPLEMENTARIOS N° 02
VARIACIÓN PROPORCIONAL

INTRODUCCIÓN

Todo lo que nos rodea tiene una disposición en su forma que responde a una constante presente en la naturaleza y que arquitectos, filósofos, matemáticos e incluso artistas han tratado de reproducir tomando como base la armonía que está directamente ligada con la belleza.

En arquitectura por ejemplo vemos armonía en la construcción de grandes puentes y famosas catedrales; en arte tenemos el famoso esquema de las proporciones del cuerpo humano de Leonardo Da Vinci, como también en las fotografías; en la naturaleza misma nos encontramos con los movimientos de los animales e incluso hasta el mismo ser humano.

En esta unidad conoceremos los principios básicos de las proporciones que nos ayudarán a futuro a entender la belleza que hay en la geometría que nos rodea.

RAZONES

Razón entre dos cantidades a y b, es la comparación por cuociente de ellas. Se denota por:

$\frac{a}{b}$ = c , o bien a : b= c, y se "lee a es a b"

Donde c = razón

Los elementos que forman la razón se llaman antecedentes y consecuentes:

a= antecedente b = consecuente

Ejemplo: Luís y Víctor tienen \$16.000 y \$20.000, respectivamente. Al comparar estas cantidades Luís dice que Víctor tiene \$4.000 más que él, sin embargo existe otra forma de comparar estas cantidades, mediante la división:

$\frac{16.000}{20.000} = \frac{4}{5}$, lo que nos indica que cada \$ 4 que tiene Luís, Víctor tiene \$5.

Si lo quisiéramos podríamos analizarlo al revés y decir que cada \$5 de Víctor, Luís tiene \$4, lo que se denomina razón inversa.

PROPORCIONES

Es la igualdad o equivalencia entre dos razones. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, entonces la proporción se denota por:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y se lee " a es a b, como c es a d"

Los términos a y d se llaman extremos y los términos b y c se llaman medios.

En el ejemplo anterior podemos decir que: $\frac{16.000}{20.000} = \frac{4}{5}$ es una proporción.

La igualdad entre tres o más razones se denomina Serie de razones.

Propiedades

a) En toda proporción se verifica que el producto de los medios es igual al producto de los extremos, es decir: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad a \cdot d = b \quad c$

Ejemplo: $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$ es proporción ya que: $\frac{12}{4} = 3$ y $\frac{15}{5} = 3$

Ahora usando el teorema: $12 \quad 5 = 4 \quad 15 = 60$

b) Una proporción no varía cuando se alternan los medios o los extremos o ambos a la vez (alternar una proporción es cambiar el orden de los medios o de los extremos).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ i) Alternando extremos: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

ii) Alternando los medios: $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

c) Una proporción no varía cuando se la invierte. Es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

d) Una proporción no varía cuando se la permuta. (Permutar una proporción es cambiar el orden de las razones).

Esto es: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

e) Toda proporción se puede componer. (Componer una proporción es comparar la suma del antecedente y consecuente en cada razón con los antecedentes o consecuentes respectivos). Esto es:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \qquad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

f) Toda proporción se puede descomponer, (Descomponer una proporción es comparar la diferencia entre el antecedente y consecuente en cada razón con los antecedentes o consecuentes respectivos). Esto es:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

g) Una proporción se puede componer y descomponer a la vez. (Esta operación consiste en comparar la suma con la diferencia entre el antecedente y el consecuente en cada razón).
Esto es:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Proporción Discontinua:

Es aquella que tiene todos sus términos desiguales es decir es del tipo: a : b = c : d

Ejemplo: $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$

Cuarta Proporcional:

Es cada uno de los términos de una proporción discontinua.
En la proporción 12 : 4 = 15 : 5 el 15 es la cuarta proporcional entre 12, 4, 5 y análogamente lo es 4 entre 12, 15, 5 y lo mismo ocurre con el 12 y el 5.

Cuando no se indica el orden de la proporción, el cálculo de la cuarta proporcional queda indeterminado, ya que pueden obtenerse 3 resultados distintos.

Ejemplo: Calcular la cuarta proporcional entre 4, 6, 8

Se puede obtener los siguientes resultados si no se da el orden de la proporción:

a) $4 : 6 = 8 : x \implies x = 12$

b) $6 : 4 = 8 : x \implies x = 5\frac{1}{3}$

c) $8 : 4 = 6 : x \implies x = 3$

Proporción Continua:

Es la que tiene los medios o los extremos iguales:

Ejemplo: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

Tercera Proporcional: (T.P.G.)

Es cada uno de los términos no repetidos de una proporción continua. En la proporción
4 : 6 = 6 :9 el 4 es tercera proporcional entre 6 y 9 ; análogamente el 9 es tercera proporcional entre 4 y 6.
También se debe conocer el orden de la proporción para determinar la tercera proporcional geométrica, o si no queda indeterminada presentándose dos posibles resultados.

Ejemplo: Calcular la tercera proporcional geométrica entre 8 y 4. Puede obtenerse:

$$8 : 4 = 4 : x \qquad x = 2$$
$$4 : 8 = 8 : x \qquad x = 16$$

Media Proporcional: (M.P.G.)

Es el término repetido de una proporción continua. En la proporción 18 :12 = 12 : 6, el 12 es la media proporcional entre 18 y 6
No es necesario conocer el orden de la proporción para determinar la media proporcional.

Ejemplo : Calcular la media proporcional entre 4 y 25

$4 : x = x : 25$ $\qquad x^2 = 100$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x = 10$

TIPOS DE PROPORCIONES

Existen tres tipos de proporción: Directa, Inversa y Compuesta. Las proporciones directa e inversa tienen dos variables, mientras que la compuesta tiene tres o más variables.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dadas dos variables X e Y, diremos que X es directamente proporcional a Y o que X varía proporcionalmente a Y, si y sólo si la razón entre un valor cualquiera de x y el correspondiente de y es constante.

Ejemplo: Un automóvil, con movimiento uniforme, viaja a una velocidad de 80 km/h. La siguiente tabla indica la variación de la distancia recorrida (Y, en km), para distintos tiempos (X, en hora).

Y = km.	80	160	240	320	400	...
X = hrs.	1	2	3	4	5	...

Si escogemos dos valores cualesquiera de X y sus dos valores correspondientes de Y, formando la razón entre los dos valores de X y la razón entre los dos valores de Y, se tiene que:

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{2}{4} \quad ; \quad \frac{y_2}{y_4} = \frac{160}{320} \qquad \text{si simplificamos:} \qquad \frac{x_2}{x_4} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{y_2}{y_4} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto podemos decir que: $\frac{x_2}{x_4} = \frac{y_2}{y_4}$, lo cual significa que las distancias recorridas son directamente proporcionales al tiempo que se emplea en recorrerlas.

Observación:

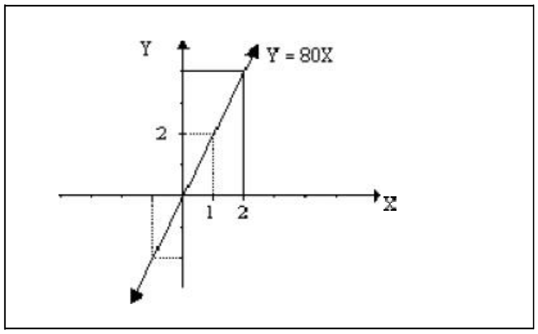
En el ejemplo anterior podemos comprobar que: $\frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \frac{320}{4} = \frac{400}{5} = K$

Con K = 80.
Luego, podemos decir que si Y es proporcional a X, entonces la razón entre Y y X permanece constante. Lo anterior se denomina Constante de Proporcionalidad.

Gráfico

Si las variables X e Y toman valores reales en forma continua el grafico de la proporción corresponde a una línea recta que pasa por el origen.

En el ejemplo anterior tenemos: $\frac{Y}{X} = K \implies Y = KX$, con $K = 80$=



PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dadas dos variables X e Y, diremos que X es inversamente proporcional a Y o que X varía inversamente con Y, si y sólo si el producto entre un valor cualquiera de X y el correspondiente de Y es constante.

Ejemplo: Un auto tiene que recorrer una distancia de 360 km. La siguiente tabla muestra el tiempo X que se demora en horas de acuerdo con la rapidez Y que llevaría en km/hr.

Y = km/hr	120	90	72	60	45	40
X = hrs.	3	4	5	6	8	9

Si escogemos dos valores cualesquiera de X y sus dos valores correspondientes de Y, formando el producto entre los dos valores de X y el producto entre los dos valores de Y, se tiene que:

$$x_2 \cdot y_2 = 90 \cdot 4 = 360 \qquad ; \qquad x_4 \cdot y_4 = 60 \cdot 6 = 360$$

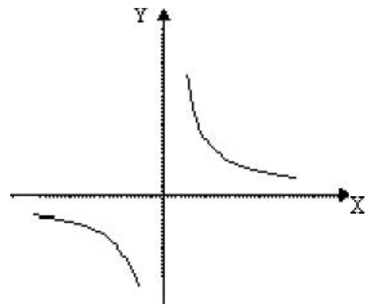
Por lo tanto: $x_2 \cdot y_2 = x_4 \cdot y_4$

Lo cual significa que la rapidez es inversamente proporcional al tiempo que se emplea en recorrer la distancia.

Observación: En el ejemplo anterior se tiene que: $120 \cdot 3 = 90 \cdot 4 = 72 \cdot 5 = \ldots = K$,
con $K = 360$. Luego podemos decir que si dos variables son inversamente proporcionales, entonces su producto permanece constante (constante de proporcionalidad).

Gráfico

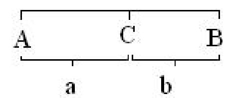
El grafico de una proporción inversa corresponde a una curva llamada Hipérbola, y es algo así como:


Y
X

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Los artistas pensaban que para que un objeto fuera bello desde el punto de vista de la forma, debía estar proporcional la parte menor y la mayor del objeto, con la parte mayor y el total. A la razón que se forma se le conoce como la Razón Áurea, denotada por , también conocido como número de oro. Formar la proporción adecuada para que el trazo AB quede dividido en una razón Áurea.

Imaginemos que el trazo es dividido (en dos partes a y b) en el punto C como lo indica la figura inferior.



Para formar la proporción Áurea solo debemos seguir los pasos de la definición:
Primero formamos la razón entre la parte menor y mayor: b : a

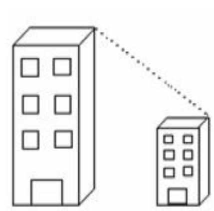
Luego la razón entre la parte mayor con el total: a : (a + b)
Por último la proporción entre las dos razones con lo que nos queda:

b : a = a : (a + b) que es la razón Áurea pedida.

Con la ayuda de tu profesor puedes encontrar el valor de la razón Áurea que es = 1,618 aprox.

2) Dibujos o planos a escala: Muchas veces has tenido la posibilidad de observar maquetas de edificios, y junto con eso leído o escuchado la frase " La maqueta está hecha a una escala de 1 : 10", lo cual hace referencia a que cada centímetro de la maqueta representa en la vida real a 10 metros (en este ejemplo), pues bien , dibujar a escala es tratar de hacer representaciones de la vida real pero en pequeño, aunque guardando las proporciones pertinentes, para que no se nos distorsione la realidad.

Si en la maqueta anterior un edificio tiene un alto de 20 cms. ¿Cuál sería su tamaño real?



EJERCICIOS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE
PROPORCIONALIDAD

1. ¿Cuál de las siguientes igualdades no es proporción?

A) 2 : 7 = 4 : 14
B) 3 : 4 = 9 : 12
C) 5 : 11 = 6 : 13
D) 1 : 16 = 5 : 80
E) 3 : 5 = 18 : 30

2. Si a : b= 5 : 2. Entonces $\frac{a+b}{a\ \ b} =$

A) 2 : 1
B) 7 : 3
C) 3 : 4
D) 1 : 2
E) 3 : 7

3. Si a + b + c = 270, siendo
a : b : c = 2 : 3 : 4. ¿Cuáles son los valores de a, b, y c?

A)	a = 70	b = 90	c = 110
B)	a = 50	b = 100	c = 120
C)	a = 30	b = 90	c = 150
D)	a = 60	b = 90	c = 120
E)	a = 80	b = 90	c = 100

4. Si (a + b) : (b + c) : (c + a) = 7 : 9 : 8, entonces a : b : c = ?

A) 2 : 3 : 4
B) 3 : 4 : 5
C) 2 : 3 : 5
D) 3 : 5 : 4
E) 4 : 5 : 3

5. El valor de p en la proporción $\frac{2}{p\ \ 2} = \frac{6}{5p+1}$ es:

A) $-\frac{3}{4}$
B) $-\frac{7}{2}$
C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{2}{7}$
E) $\frac{1}{4}$

6. Si $p : q = 3 : 5$ y $q : r = 5 : 9$, entonces $p : r =$

A) 3 : 18
B) 9 : 18
C) 5 : 9
D) 3 : 4
E) 3 : 9

7. Si $\frac{3}{p} = \frac{11}{17}$, entonces ¿qué parte es 3 de p?

A) $\frac{11}{17}$
B) $\frac{1}{17}$
C) $\frac{17}{11}$
D) $\frac{11}{51}$
E) $\frac{17}{33}$

8. Si $b : a = 4 : 2$ y $b : c = 2 : 3$, entonces ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) $a : b : c = 1 : 2 : 3$
II) $a : c = 1 : 3$
III) $\frac{1}{b^2} : \frac{1}{a^2} = 1 : 4$

A) Sólo I y II
B) Sólo I y III
C) Sólo II y III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

9. Si $m : n = 2 : 3$, ¿cuánto vale $m + n$?

A) 6
B) $\frac{5}{3}m$
C) $\frac{3}{5}m$
D) $\frac{5}{3}n$
E) 15 n

10. Dada la proporción $x : y = 3 : 2$. Determine $\left(\frac{x + y}{x \quad y}\right)^2$

A) $\frac{3}{2}$
B) $\frac{9}{4}$
C) 9
D) 25
E) 0

11. ¿Qué número debe sumarse a cada término de la razón 5 : 37 para hacerla equivalente a 1 : 3?

A) 6
B) 9
C) 11
D) 16
E) 37

12. La diferencia entre los $\frac{7}{10}$ y la mitad de un número es 12, ¿cuál es el número?

A) 24
B) 60
C) 120
D) 420
E) 840

13. Si Mauro tiene 18 años, la razón entre su edad y la de su hermano es 2 : 3. ¿Cuál es la edad del hermano, si este es mayor que Rodrigo?

A) 20
B) 21
C) 27
D) 36
E) 54

14. El consumo de electricidad y de un computador es directamente proporcional al tiempo x durante el cual se encuentra encendido. Si k es una constante distinta de cero, entonces, ¿qué expresión matemática representaría la situación anterior?

A) $y = x + y$
B) $y = k^x$
C) $y = k \quad x^2$
D) $y = \frac{k}{x}$
E) $y = k \quad x$

15. Si el perímetro de un rectángulo mide 96 metros. ¿Cuál es el valor de sus lados a y b si están en la razón a : b = 3 : 5?

A) a = 30 y b = 18
B) a = 20 y b = 28
C) a = 18 y b = 30
D) a = 18 y b = 20
E) a = 15 y b = 33

16. La razón entre los perímetros de un triángulo equilátero de lado m y un triángulo rectángulo cuyos catetos miden m es:

A) $3 : (2 + \sqrt{2})$
B) $1 : \sqrt{2}$
C) $2 : 3$
D) $3 : 2\sqrt{2}$
E) $1 : 2$

17. Dos hermanos, hace dos años, tenían una diferencia de edad de tres años y sus edades estaban en la razón 4 : 5. ¿Cuál es la edad del menor de los hermanos en tres años más?

A) 12 años
B) 13 años
C) 14 años
D) 16 años
E) 17 años

18. La madre de Rodrigo para preparar un queque utiliza 3 huevos por cada 2 tazas de harina y 2 tazas de leche por cada 3 tazas de harina. ¿Cuántos huevos necesita por 8 tazas de leche?

A) 21 huevos
B) 18 huevos
C) 16 huevos
D) 15 huevos
E) 9 huevos

19. El edificio donde vive Carlos, tiene una planta rectangular de 300 metros de largo y 245 metros de ancho. Si se dibuja a escala, en un plano, de modo que 0,25 cm equivale a 1 m, ¿cuáles son las dimensiones que representa a esta planta en el plano?

	Largo	Ancho
A)	75 cm	61,25 cm
B)	61,25 cm	75 cm
C)	75 cm	605 cm
D)	605 cm	75 cm
E)	Ninguna de las anteriores.	

20. Dos amigas tenían hace dos años sus edades en la razón de 2 : 5, en cambio en un año más la diferencia de sus edades será de 15 años. ¿Cuál es la edad de la menor de ellas?

A) 27
B) 21
C) 15
D) 12
E) Ninguna de las anteriores.

21. A la fiesta de cumpleaños de Lucas asistieron 56 personas. Si había 4 hombres por cada 3 mujeres ¿cuántos hombres asistieron a la fiesta ?

A) 32
B) 28
C) 24
D) 21
E) 8

22. La maqueta de un faro está en la escala 1 m : 120 m. Si en la maqueta el faro tiene una altura de 20 cm. ¿Cuál es la altura real del faro?

A) 0,6 mts.
B) 1,2 mts.
C) 24 mts.
D) 600 mts.
E) 2.400 mts.

23. Una persona de 150 cm. de estatura, da pasos de 30 cm. Si mantiene la razón estatura : paso, ¿Cuánto mide cada paso de una persona de 160 cm de estatura ?

A) 10 cm
B) 32 cm
C) 40 cm
D) 53,3 cm
E) 80 cm

24. Se sabe que x e y representan números inversamente proporcionales. Si y = 3 cuando x = 2. ¿Cuánto vale y si x = 6?

A) 9
B) 1
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{9}$
E) Ninguna de las anteriores.

25. Dos variables P y Q son inversamente proporcionales entre sí. Para mantener el valor de la constante de proporcionalidad, si Q aumenta al doble, entonces P

A) Se mantiene constante.
B) Disminuye en dos unidades.
C) Aumenta en dos unidades.
D) Disminuye a la mitad.
E) Aumenta al doble x

26. Se sabe que x e y representan números inversamente proporcionales. Si y = 3 cuando x = 2. ¿Cuánto vale y si x = 6?

A) 9
B) 1
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{9}$
E) Ninguna de las anteriores.

27. Si $M \cdot N = K$, y M se triplica mientras que k permanece constante, entonces ¿Cómo varía N?

A) Permanece igual
B) Disminuye en sus dos terceras partes
C) Disminuye en su tercera parte
D) Aumenta en sus dos terceras partes
E) Aumenta en su tercera parte.

28. x es directamente proporcional a $\frac{1}{y}$, cuando $x = 15$, $y = 4$. Si $x = 6$, entonces $y =$

A) 10
B) 12
C) 15
D) 20
E) 25

29. Un mapa está hecho en la escala de 1 : 350.000. Si la distancia entre dos ciudades en el mapa es 1 cm, en la realidad es:

A) 3.500 km.
B) 350 km.
C) 35 km.
D) 3,5 km.
E) No se puede calcular.

30. Si en la tabla de la figura siguiente, x e y representan valores directamente proporcionales, entonces los valores de a y b son

x	y
3	7
a	20
5	b

A) $a = \frac{7}{60}$, $b = \frac{3}{35}$
B) $a = \frac{140}{3}$, $b = \frac{15}{7}$
C) $a = \frac{60}{7}$, $b = \frac{35}{3}$
D) $a = 16$, $b = 9$
E) $a = \frac{21}{20}$, $b = \frac{21}{5}$

31. Si P es directamente proporcional a Q y además vale 24 cuando Q vale 6. ¿Cuál es su valor cuando Q vale 7 ?

A) 14
B) 28
C) 32
D) 42
E) 56

32. ¿En cuál de las siguientes tablas, la variable x es inversamente proporcional a la variable y?

A)

x	y
3	2
6	4
2	3

B)

x	y
4	3
6	2
12	1

C)

x	y
1	13
2	26
3	5

D)

x	y
10	2
12	9
4	5

E)

x	y
12	4
3	1
6	5

33. Un motor encendido consume m litros de bencina durante t horas. Si cada litro de bencina cuesta \$ p, entonces ¿cuánto dinero se necesita para mantener encendido el motor durante h horas?

A) $\frac{mph}{t}$

B) $\frac{t}{mph}$

C) $\frac{ph}{t}$

D) $\frac{mth}{p}$

E) $\frac{mp}{t}$

34. En una sala de clases hay 48 estudiantes. Si por cada 2 niños hay 1 niña, entonces el número de niñas que hay en la sala de clases es

A) 8
B) 16
C) 24
D) 32
E) 36

35. Un grifo que entrega 0,6 litros de agua por segundo, llenó un estanque en 21 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo otro grifo que da 0,9 litros por segundo?

A) 7 horas
B) 14 horas
C) 16 horas
D) 28 horas
E) 31,45 horas

36. Se tiene que limpiar una siembra de papas en una semana, para lo cual se necesitan 19 obreros, con jornada normal de trabajo, (8 horas). Si sólo se dispone de 16 hombres. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar?

A) 6,7 horas
B) 9 horas
C) 9,30 horas
D) 9 horas 30 minutos
E) 12 horas

37. Dos personas arman dos rompecabezas en 6 horas. ¿Cuántos rompecabezas armarán 4 personas en 9 horas?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 24

38. Un grupo de personas realizan un trabajo en 14 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días habrían demorado trabajando una hora menos al día?

A) 32 días
B) 18 días
C) 16 días
D) 15,75 días
E) 12,25 días

39. Una cuadrilla de 12 mineros excava un túnel de 10 metros de longitud en 24 días. ¿Cuántos días demorarán 24 mineros en excavar 5 metros de túnel?

A) 6 días
B) 10 días
C) 11,5 días
D) 12 días
E) 18 días

40. Se sabe que $x : y : z = 2 : 3 : 4$. Se puede determinar el valor numérico de x si:

(1) $x \cdot y \cdot z = 192$
(2) $x : y = 2 : 3$; $z : y = 4 : 3$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional.

RESPUESTAS

1. C	11. C	21. A	31. B
2. B	12. B	22. C	32. B
3. C	13. C	23. B	33. A
4. B	14. E	24. B	34. B
5. B	15. C	25. D	35. B
6. E	16. A	26. B	36. D
7. C	17. E	27. B	37. B
8. D	18. B	28. A	38. C
9. D	19. A	29. D	39. A
10. D	20. D	30. C	40. A