PREUNIVERSITARIO PREUTECH.
DEPTO. MATEMÁTICA.
CURSO: MATEMÁTICA.

MÓDULO DE EJERCITACIÓN N°7

POTENCIAS - RAÍCES - LOGARITMOS

EJE TEMÁTICO: NÚMEROS

PROFESOR CARLOS AGUAYO G.

1. Expresa las siguientes operaciones como un número decimal.

   a) $2{,}5 \cdot 10^{7}$ b) $3{,}12 \cdot 10^{-5}$

2. Simplifica estas fracciones utilizando las propiedades de las potencias.

   a) $\dfrac{2^{3}\ 4^{5}\ 3^{4}}{(\ 9)^{2}\ 6^{3}}$ b) $\dfrac{5^{2}\ 15^{3}\ 3^{2}}{(\ 25)^{2}\ 30^{2}}$

3. Calcula mentalmente las siguientes potencias:

   a) $2^{3} =$
   b) $(-2)^{3} =$
   c) $-2^{3} =$
   d) $-(-2)^{3} =$

4. Calcula mentalmente los cinco primeros cuadrados perfectos.

5. Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

   a) $4{,}23^{2} =$
   b) $2{,}5^{3} =$
   c) $0{,}9^{12} =$
   d) $5{,}3 \cdot 10^{7} \cdot 8{,}4 \cdot 10^{3} =$

6. Escribe en forma de potencia de base 2:

   a) 32
   b) 2
   c) 1
   d) 1/32

7. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

   a) $x^{3} \cdot x^{4}$ b) $x^{7} : x^{3}$ c) $(x^{3})^{2}$ d) $x^{3} \cdot x^{4} : x^{5}$

8. Considera las potencias 2^{-2}, 2^{-3} y 2^{-5}.

   a) ¿Cuál es la mayor?
   b) ¿Cómo es la potencia a medida que el exponente negativo aumenta en valor absoluto?
   c) Contesta a las cuestiones anteriores para las potencias $0{,}7^{-3}$, $0{,}7^{-4}$ y $0{,}7^{-5}$.

9. Averigua el valor de x en estas igualdades.

a) $5^x \cdot 5^3 = 5^6$
b) $(-2)^{5x} : (-2)^{2x} = (-2)^6$
c) $(-6)^x : (-6)^8 = (-2)^0$
d) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$

10. Piensa y Resuelve:

a) Se ha organizado un concurso de tiro con arco. Después de seleccionar a los concursantes se han formado cinco equipos de cinco miembros cada uno. Cada miembro del equipo dispone de cinco flechas para lanzar a la diana. ¿Cuántas flechas se necesitan?

b) La biblioteca del aula tiene tres estanterías. Cada estantería consta de tres baldas y cada balda tiene tres apartados que contienen tres libros. ¿Cuántas baldas, apartados y libros tiene la biblioteca? Expresa el resultado en forma de potencia.

c) Una potencia de exponente entero positivo, ¿es siempre mayor que la base? ¿En qué casos?

d) Álvaro dibuja tres cuadrados, uno de 5 cm de lado, otro de 12 cm de lado y el tercero de 13 cm de lado. Después colorea de rojo los dos primeros y de verde el último. ¿Qué superficie es mayor, la verde o la roja?

e) Un hortelano planta lechugas en una parcela de su huerta. Las distribuye en 25 surcos y en cada surco pone 25 lechugas. ¿Cuántas plantas ha colocado?

f) Un cine de verano dispone de 625 sillas distribuidas en igual número de filas y de columnas. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?

g) Una finca cuadrada tiene 900 metros cuadrados de superficie. ¿Cuántos metros lineales de alambrada habría que comprar para cercarla?

h) Recorta en papel cuadriculado dos cuadrados, uno de diez cuadrados de lado y otro de cinco.
¿Hay en el primero el doble de cuadrados que en el segundo? Explica tu respuesta.

11. Reflexiona sobre estos enunciados y tradúcelos a igualdades o desigualdades matemáticas:

a) Potencia de un producto. ↔ Producto de las potencias de los factores.
b) Potencia de una suma. ↔ Suma de las potencias de los sumandos.
c) Producto de potencias de igual base. ↔ La misma base elevada a la suma de exponentes.
d) Potencia de potencia. ↔ La misma base elevada al producto de los exponentes.
e) Potencia de exponente cero. ↔ Uno.

12. Comprueba si estas raíces cuadradas están bien resueltas.

a) $\sqrt{225} = 15$ b) $\sqrt{255} = 16$ c) $\sqrt{1\,000} = 100$ d) $\sqrt{40\,000} = 200$

13. Escribe todos los números que tengan como raíz entera 5.
¿Cuántos números hay? ¿Cuántos números tendrán como raíz entera 6? ¿Y 7?

14. Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

a) $\sqrt[3]{1000} = x$
b) $\sqrt[6]{x} = 10$
c) $\sqrt[x]{81} = 3$
d) $\sqrt[4]{16} = x$

15. Utilizando la calculadora, halla las siguientes raíces. Redondea los resultados a dos decimales.

a) $\sqrt{345,67}$ b) $\sqrt[3]{895,34}$ c) $\sqrt[4]{89,45}$ d) $\sqrt[5]{1000}$

16. Escribe en forma de radical las potencias:

a) $5^{1/3}$ b) $x^{-1/2}$ c) $a^{2/3}$ d) $6^{-3/4}$

17. Escribe en forma de potencia los radicales:

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[5]{a^2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{6^5}}$

18. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{5^4}$ b) $\sqrt[6]{x^2}$ c) $\sqrt[8]{5^6}$ d) $\sqrt[12]{a^8}$

19. Introduce dentro del radical el factor que está delante:

a) $3\sqrt{5}$ b) $a\sqrt[3]{4}$ c) $2^4 a\sqrt[5]{2a^2}$ d) $3^2x^3\sqrt[4]{5x}$

20. Ordena de menor a mayor: $\sqrt{7^3}$, $\sqrt[3]{7^5}$, $\sqrt[4]{7^5}$.

21. Calcula las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{\sqrt{2}\ \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{16}\ :\ \sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{\dfrac{5}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{27}{5}}$ d) $\sqrt[5]{2}\ :\ \sqrt[5]{2^4}$

e) $\sqrt[4]{3^3}\ \cdot\ \sqrt[4]{3^{17}}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} : \sqrt[3]{2000}$ g) $(\sqrt[4]{2^7})^3$ h) $(\sqrt{3\ 2^3})^7$ i) $\sqrt{\sqrt[3]{2^{18}}}$

22. Calcula las siguientes raíces

a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[4]{16}$ e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$

g) $\sqrt[3]{1000}$ h) $\sqrt[5]{100000}$

23. Realiza los siguientes productos y divisiones:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$
b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50} =$
c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} =$
d) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[8]{5} =$
e) $\sqrt{6}\ :\ \sqrt{2} =$
f) $\sqrt[3]{40}\ :\ \sqrt[3]{5} =$
g) $\sqrt[3]{4}\ :\ \sqrt{6} =$
h) $\sqrt[3]{9}\ :\ \sqrt[6]{18} =$

24. Racionaliza:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}\ \sqrt{3}}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{14}}$ f) $\dfrac{5}{2\ \sqrt{3}}$

25. Suma y simplifica:

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} =$
b) $\sqrt{9\ \ 2} + \sqrt{25\ \ 2} - \sqrt{2} =$
c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} =$
d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8} =$
e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a} =$

26. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{a\ \ 1}{\sqrt{a}\ \ 1}$ d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}\ \ \sqrt{y}}$ e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}\ \ \sqrt{5}}$

f) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}\ \ 2\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}\ \ 1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}\ \ 1}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\ \ \sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}\ \ \sqrt{y}}$

27.Halla el valor de x en los siguientes casos:

a) $10^3 = x$ b) $10^x = 1000000$ c) $x^2 = 100$ d) $x^1 = 10$ e) $10^x = 1$

28. Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 1/8$

29. Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, ≠:

a) $\log(7 + 5) \ldots \log 7 + \log 5$
b) $\log 5^2 \ldots 2 \log 5$
c) $\log \dfrac{6}{5} \ldots \log 6 - \log 5$
d) $\log \sqrt[3]{5} \ldots \log \dfrac{5}{3}$

30. Sabiendo que log 5 = 0,6990, halla:

a) log 2 b) log 20

31. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales:

a) log 405,75 b) log 1,9 c) log 0,0005

32.Reduce al logaritmo de una sola expresión:

a) $\log 5 + \log 6 - \log 2$ b) $2 \log 7 + 3 \log 5$ c) $3 \log a + 2 \log b - 5 \log c$

d) $2 \log x - 5 \log y + 3 \log z$ e) $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{3}\log y$

33. Encontrar el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_x 25 = 2$ b) $\log_x 243 = 3$ c) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ d) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

e) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$ f) $\log_2 4 = x$ g) $\log_2 0{,}5 = x$ h) $\log_x \frac{1}{64} = -6$

i) $\log_x 1000 = 3$ j) $\log_{10} 0{,}001 = x$ k) $\log_x \sqrt{125} = \frac{3}{2}$ l) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

34. Halla:

a) $\log_2 16$ b) $\log_2 0{,}25$ c) $\log_9 1$ d) $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ f) $\log_7 49$ g) $\ln e^4$ h) $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0{,}04$ j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

35.Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} =$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1 =$

36. Calcula la base de estos logaritmos

a) $\text{Log}_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

37.Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $\log 3^x = 2$ b) $\log x^2 = -2$ c) $7^x = 115$ d) $5^{-x} = 3$

38. Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

39. Sabiendo que log 3 = 0,477, calcula el logaritmo decimal de 30; 300; 3000; 0,3; 0,03; 0,003.

40. Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$
b) $\log x = \log 36 - \log 9$
c) $\ln x = 3 \ln 5$
d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 2\log 6$
e) $\ln x = 4\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 25$

41. ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$
b) $\log m + \log n = \log (m \cdot n)$
c) $\log m - \log n = \log \frac{\log m}{\log n}$
d) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$
e) $\log x^2 = \log x + \log x$
f) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

42. ¿Qué relación existe entre a y b en los siguientes casos?:

a) $\log a = 1 + \log b$
b) $\log a + \log \frac{1}{b} = 0$

43. Sabiendo que ln k = 0,45, calcula el valor de:

a) $\ln \frac{k}{e}$ b) $\ln \sqrt[3]{k}$ c) $\ln \frac{e^2}{k}$

44. Conociendo los valores aproximados de log 2 = 0,301 y log 3 = 0,477, calcula los siguientes usando las propiedades de los logaritmos.

a) log 24 b) log 5

45. Aplicaciones de los logaritmos.

a) Rodrigo depositó $ 900.000 en un banco al 7% de interés compuesto anual. ¿Cuál es la expresión permite calcular el tiempo, en años, en que su dinero se duplicará, sin hacer depósitos ni retiros en ese tiempo?.

b) Se considera que la acidez de la lluvia comienza a ser seriamente perjudicial para el suelo y los seres vivos cuando esta presenta un pH inferior a 5.
¿Qué concentración de iones H^+ se corresponde con esta concentración del pH? Exprésalo en forma de potencia y de número decimal.

c) Una especie duplica su población cada año. Si la población inicial era de 100 individuos, ¿cuántos años pasarán hasta que se supere el millón?

d) Para determinar la edad de una roca, la ciencia ha desarrollado una técnica basada en la concentración de cierto material radiactivo en su interior. Cuanto más joven es la roca, mayor concentración de material radiactivo se encuentra en ella. La ecuación que relaciona la concentración del material con la edad de la roca es:

$$C(x) = 3^{-t} \cdot k$$

donde C(x) representa la concentración del material radiactivo encontrada en la roca, t la edad de la roca (medida en cientos de años) y k la concentración del elemento en el momento de formarse la roca.

Suponiendo que k = 4500:

a.) ¿Qué edad tendrá una roca que tiene una concentración de 1500 del material radiactivo?
b.) ¿Qué edad tendría que tener una roca para que ya no tuviera el material radiactivo?