RESPUESTAS
MÓDULO DE EJERCITACIÓN Nº 7
POTENCIAS – RAÍCES - LOGARITMOS

1. a) $2{,}5 \cdot 10^7 = 25.000.000$ b) $3{,}12 \cdot 10^{-5} = 0{,}000031\,2$

2. a) $\dfrac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 3^{-4}}{(-9)^2 \cdot 6^3} = \dfrac{2^3 \cdot 2^{10} \cdot 3^{-4}}{3^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \dfrac{2^{10}}{3^{11}}$

   b) $\dfrac{5^{-2} \cdot 15^3 \cdot 3^2}{(-25)^2 \cdot 30^2} = \dfrac{5^{-2} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 3^2}{5^4 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \dfrac{3^3}{5^5 \cdot 2^2}$

3.
   a) 8
   b) –8
   c) –8
   d) 8

4. 0, 1, 4, 9, 16

5.
   a) 17,89 b) 15,63
   c) 0,28 d) $4{,}45 \cdot 10^{11}$

6. a) 2^5 b) 2^1 c) 2^0 d) 2^{-5}

7. a) x^7 b) x^4 c) x^6 d) x^2

8. a) La potencia mayor es 2^{-2}.
   b) La potencia disminuye a medida que aumenta el exponente en valor absoluto.
   c) La mayor es $0{,}7^{-5}$. La potencia aumenta a medida que lo hace el exponente en valor absoluto. La diferencia con el caso anterior es porque la base es ahora menor que la unidad.

9. a) a = 3 c) a = 8
   b) a = 2 d) a = 3

10.Piensa y Resuelve:

a) $5^3 = 125$. Se necesitan 125 flechas.

b) Baldas: $3^2 = 9$ Apartados: $3^3 = 27$ Libros: $3^4 = 81$

c) Es mayor que la base si esta es mayor que 1.

d) Coloreados de rojo tendremos $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ cm^2 y de verde, $13^2 = 169$ cm^2, por lo que las dos superficies son iguales.

e) Ha colocado $25^2 = 625$ plantas.

f) En cada fila hay $\sqrt{625} = 25$ sillas.

g) Cada lado de la finca medirá $\sqrt{900} = 30$ m.

Por tanto, se necesitan $4 \cdot 30 = 120$ m de alambrada para cercar la finca.

h) El cuadrado de 10 cuadrados de lado tiene $10^2 = 100$ cuadrados de superficie, y el de 5 cuadrados de lado tiene $5^2 = 25$. Por tanto, es falso que el primero tenga el doble de cuadrados que el segundo.

11.a) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
b) $(a + b)^m \neq a^m + b^m$
c) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
d) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
e) $a^0 = 1$

12. a) Bien resuelta, porque $15^2 = 225$.
b) Mal resuelta, porque $16^2 = 256$.
c) Mal resuelta, porque $100^2 = 10\ 000$.
d) Bien resuelta, porque $200^2 = 40\ 000$.

13. Tienen como raíz entera 5 todos los números comprendidos entre 25 y 36.
Tienen como raíz entera 6 todos los números comprendidos entre 36 y 49, y tienen como raíz entera 7 todos los números comprendidos entre 49 y 64.

14. a) $x = 10$ b) $x = 1.000.000$ c) $x = 4$ d) $x = 2$

15. a) 18,59 b) 9,64 c) 3,08 d) 3,98

16. a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{6^3}}$

17. a) $7^{1/2}$ b) $a^{2/5}$ c) $a^{-1/3}$ d) $6^{-5/7}$

18. a) 25 b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

19. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt[3]{4a^3}$ c) $\sqrt[3]{2^{13}a^5}$ d) $\sqrt[4]{5 \cdot 3^8 x^{13}}$

20. Primero se reducen a índice común. En este caso, el mínimo común múltiplo de los índices es 12.

$\sqrt{7^3} = \sqrt[12]{7^{18}}$, $\sqrt[3]{7^5} = \sqrt[12]{7^{20}}$, $\sqrt[4]{7^5} = \sqrt[12]{7^{15}}$

Ordenar las raíces es ahora sencillo, solo hay que ordenar los radicandos. El orden pedido es el siguiente.

$$\sqrt[4]{7^5} < \sqrt{7^3} < \sqrt[3]{7^5}$$

21. a) 2 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$ e) 3^5 f) $\frac{1}{20}$

g) $2^5 \cdot \sqrt[4]{2}$ h) $3^3 \cdot 2^{10}\sqrt{6}$ i) 8

22. a) 2 b) 2 c) 3 d) 2 e) 3 f) 5

g) 10 h) 10

23.

a) $2\sqrt{3}$ b) $5\ {}^{3}2$ c) ${}^{6}500$ d) ${}^{24}10125$ e) $\sqrt{3}$ f) $\sqrt[3]{8}$ g) $\sqrt[6]{\frac{2}{27}}$ h) $\sqrt[6]{\frac{9}{2}}$

24. a) $2\sqrt{3}$ b) $2 \cdot {}^{3}5^2$ c) 5 – 3 d) $2\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt[3]{14^2}}{2}$ f) $10 - 5\sqrt{3}$

25. a) $10\sqrt{x}$ b) 7 2 c) 5 2 d) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2a}$

26. a) $\sqrt{2} - 1$ b) $\frac{x\ \ x - x\ \ y + y\ \ x - y\ \ y}{x - y}$ c) $\sqrt{a} + 1$ d) $\frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y}$

e) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{7}$ f) $5 + 2\sqrt{6}$ g) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ h) $\frac{2\sqrt{x}}{x - y}$

27. a) x = 1000 b) x = 6 c) x = ± 10 d) x = 10 e) x = 0

28. a) 5 b) 0 c) –3

29. a) ≠ b) = c) = d) ≠

30. a) $\log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0{,}6990 = 0{,}3010$

b) $\log (2^2 \cdot 5) = 2\log 2 + \log 5 = 2 \cdot 0{,}3010 + 0{,}6990 = 1{,}3010$

31. a) 2,6083 b) 0,2788 c) – 3,3010

32.

a) $\log \frac{5 \cdot 6}{2} = \log 15$ b) $\log(7^2 \cdot 5^3)$ c) $\log \frac{a^3 \cdot b^2}{c^5}$ d) $\log \frac{x^2 \cdot z^3}{y^5}$

e) $\log\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}\right) = \log \sqrt[6]{x^3 y^2}$

33.

a) $x = 5$ b) $x = 3^{5/3}$ c) $x = 16$ d) $x = 4$ e) $x = 1/16$ f) $x = 2$

g) $x = -1$ h) $x = 2$ i) $x = 10$ j) $x = -3$ k) $x = 5$ l) $x = -3$

34. a) 4 b) –2 c) 0 d) –1 e) 3 f) 2 g) 4 h) $-\frac{1}{4}$ i) –2 j) –3

35. a) $\frac{3}{2}$ b) –8

36. a) $x = 5$ b) $x = 3$

37. a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4{,}19$ b) $2\log x = -2$; $x = \frac{1}{10}$ c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2{,}438$

d) $x = \frac{\log 3}{\log 5} = -0{,}683$

38. $\text{Ln } y = 2x - \text{Ln } 5 \rightarrow \text{Ln } y = \text{Ln } e^{2x} - \text{Ln } 5$

$\text{Ln } y = \text{Ln } \frac{\ln e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$

39. log 30 = log (3 · 10) = log 3 + log 10 = 0,477 + 1 = 1,477
log 300 = log (3 · 102) = log 3 + 2 log 10 = 2,477
log 3 000 = 0,477 + 3 = 3,477
log 0,3 = log (3 · 10–1) = 0,477 – 1 = –0,523
log 0,03 = log (3 · 10–2) = 0,477 – 2 = –1,523
log 0,003 = 0,477 – 3 = –2,523

40.

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 \Rightarrow x = 5^3 = 125$

d) $\log x = \log \frac{12 \cdot 25}{6^2} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

e) $\ln x = \ln 2^4 - \ln\sqrt{25}$
$\ln x = \ln 16 - \ln 5$
$\ln x = \ln \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

41. a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$
b) Verdadero. Es una propiedad de los logaritmos.
c) Falso. $\log m - \log n = \log\left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log m}{\log n}$
d) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.
e) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$
f) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

42. a) $\log a - \log b = 1 \rightarrow \log \frac{a}{b} = 1 \rightarrow \frac{a}{b} = 10 \rightarrow a = 10b$

b) $\log\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = 10^0 \rightarrow \frac{a}{b} = 1 \rightarrow a = b$

43. a) $\ln \frac{k}{e} = \ln k - \ln e = 0{,}45 - 1 = -0{,}55$

b) $\ln \sqrt[3]{k} = \frac{1}{3} \ln k = \frac{1}{3} \cdot 0{,}45 = 0{,}15$

c) $\ln \frac{e^2}{k} = 2 \ln e - \ln k = 2 - 0{,}45 = 0{,}15$

44.

a) $\log 24 = \log (2^3 \cdot 3) = \log 2^3 + \log 3 = 3 \log 2 + \log 3 = 3 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}38$

b) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$

45.

a) $\dfrac{\log 1.800.000 - \log 900.000}{\log 1{,}07}$

b) $pH = -\log[H^+] \Rightarrow 5 = -\log[H^+] \Rightarrow 5 = \log \dfrac{1}{[H^+]} \Rightarrow 10^5 = \dfrac{1}{[H^+]}$

$\Rightarrow [H^+] = \dfrac{1}{10^5} = 10^{-5} = 0{,}00001$

c) llamando t al número de años, hay que resolver:

$100 \cdot 2^t > 1.000.000 \Rightarrow 2^t > 10.000 \Rightarrow \log 2^t > \log 10.000 = 4$

$\Rightarrow t > \dfrac{4}{\log 2} \approx 13{,}28$. Pasarán 14 años.

d) Si se aplica logaritmos a la ecuación dada se obtiene:

$\ln[C(x)] = \ln(3^{-t}\ k) = \ln 3^{-t} + \ln k$

$\ln [C(x)] = -t(\ln 3) + \ln k$

que sería la ecuación escrita en forma logaritmica.

De esta manera, en el inciso a), al sustituir los valores C(x) y de k queda:

$\ln 1500 = -t \cdot \ln 3 + \ln 4500$

$t \ln 3 = \ln 4500 - \ln 1500$

$= \ln \dfrac{4500}{1500} = \ln 3$

Por lo tanto $t = 1$

De modo que la edad de la roca es de 100 años (puesto que t = 1 y el tiempo se mide en ciento de años).

Para el inciso b.), el material radiactivo se acabaría cuando su concentración llegara a cero, lo que significaría que:

$\ln 0 = -t(\ln 3) + \ln k$

Pero el logaritmo de cero no existe, de modo que la ecuación no tiene solución, por lo que, teóricamente, siempre quedaría un resto (mínimo) de material radiactivo.