PREUNIVERSITARIO PREUTECH.
CURSO: NIVELACIÓN MATEMÁTICA.
PROCESO ADMISIÓN 2021.
DEPTO. MATEMÁTICA.

PRUEBA DE TRANSICIÓN DE MATEMÁTICA

TALLER DE NIVELACIÓN N° 1
NÚMEROS ENTEROS
VERSIÓN 2020

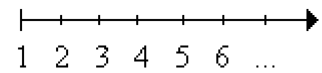
TEMA: NÚMEROS ENTEROS.

- **DEFINICIÓN DEL CONJUNTO DE NÚMEROS ENTEROS Z.**
- **ORDEN EN Z.**
- **OPERATORIA DE NÚMEROS ENTEROS.**
- **PROPIEDADES DE LA ADICIÓN EN Z.**
- **MULTIPLICACIÓN EN Z.**
- **PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES.**
- **SUCESOR Y ANTECESOR, NÚMEROS PARES, NÚMEROS IMPARES.**
- **MÚLTIPLOS – DIVISORES - NÚMEROS PRIMOS – NÚMEROS COMPUESTOS.**
- **CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.**
- **DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS.**
- **VALOR ABSOLUTO.**
- **VOCABULARIO MATEMÁTICO.**

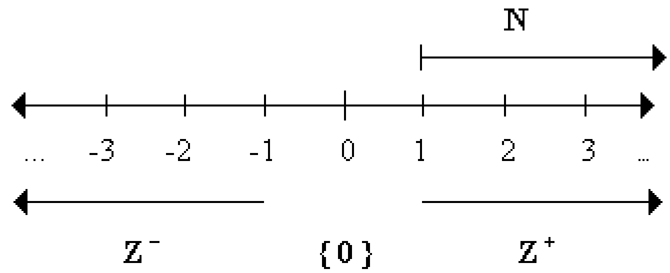
PROFESOR: CARLOS AGUAYO G.

DEFINICIÓN CONJUNTOS DE NÚMEROS ENTEROS Z.

Los Números Enteros (**Z**) surgen como una necesidad para; resolver ejercicios de este tipo; (2 - 9). Recordemos que la recta de los números naturales (**N**) es la siguiente:



En esta recta es imposible resolver (2 – 9) (lee el signo (–) como retroceder). Por tal razón fue necesario crear un nuevo conjunto numérico, el cual conocemos con el nombre de **Enteros** y cuya recta es la siguiente:

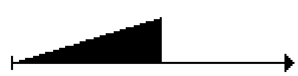


Llamamos Enteros Negativos ($\mathbf{Z}^-$): {..., –3, –2, –1}. Llamamos Enteros Positivos (Z^+): {1, 2, 3,...} y $Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = Z$.

Observe que $N = Z^+$ y que el cero no es positivo ni negativo.

ORDEN EN Z.

Los números enteros presentan un orden valórico, que se puede resumir de la siguiente forma: Observando la recta numérica diremos que siempre los números crecerán de izquierda a derecha, es decir, así:



De la anterior observación, se desprende que:

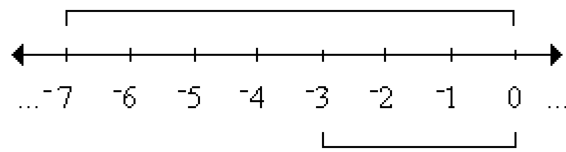
Los números negativos **crecen** en valor a medida que se **acercan** a cero.

$$\boxed{\mathbf{-3 > -7}}$$

Se lee : **"–3 mayor que –7** "

Ejemplo:

debido a que –3 está más cerca del cero que –7, a saber:



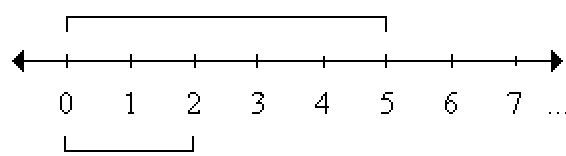
Podemos concluir que:

Cero es mayor que cualquier entero negativo.
Todo entero negativo es menor que cualquier entero positivo.

Los enteros positivos **crecen** en valor a medida que se **alejan** de cero.
Ejemplo:

$$\boxed{\mathbf{5} > \mathbf{2}}$$

debido a que cinco está ubicado más lejos del cero que dos, a saber:



Podemos concluir que:

* Cero es menor que cualquier entero positivo.
* Todo entero positivo es mayor que cualquier entero negativo.

SUCESOR Y ANTECESOR, NÚMEROS PARES, NÚMEROS IMPARES.

Sea **n** un número entero, entonces se define lo siguiente:

- El sucesor de n es (n + 1).
- El antecesor de n es (n – 1).
- El entero 2n es siempre par.
- El entero (2n – 1) es siempre impar.
- El entero (2n + 1) es siempre impar.
- Son pares consecutivos 2n y 2n + 2.
- Son impares consecutivos 2n + 1 y 2n + 3.
- El cuadrado perfecto de n es n^2.

OBSERVACIÓN:

Son cuadrados perfectos los enteros: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, …

OPERATORIA DE ENTEROS.

En primer lugar realizaremos algunas precisiones:

1º Todo número posee su signo en su extremo superior izquierdo:
Ejemplo:
-3 : es negativo (está a la izquierda del cero).
$^{+}5$: es positivo (está a la derecha del cero).

2º Se conviene que cuando un número es positivo, este signo no se registrará y se entenderá al número como positivo (+), es decir:

$$^{+}9 = 9$$

3º Cuando dos números se están operando, el símbolo que identifica a alguno de ellos se registrará **entre** los números de la siguiente forma:

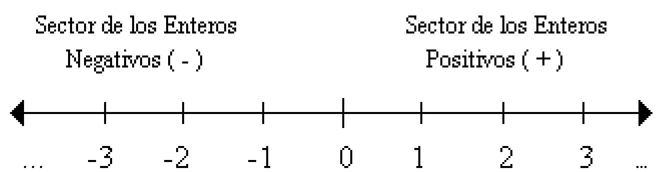
$(4 + -5)$; $(-9 \cdot 5)$

Adición Multiplicación

En los enteros se definen dos operaciones, a saber:

ADICIÓN.

Un primer acercamiento hacia la comprensión de la operación Adición en **Z**, la haremos a través de la recta numérica.
Recordemos la recta:



Una expresión como [(3) + (−1)] es bueno entenderla de la siguiente forma:
Tres se aproxima un lugar hacia el sector de los enteros negativos

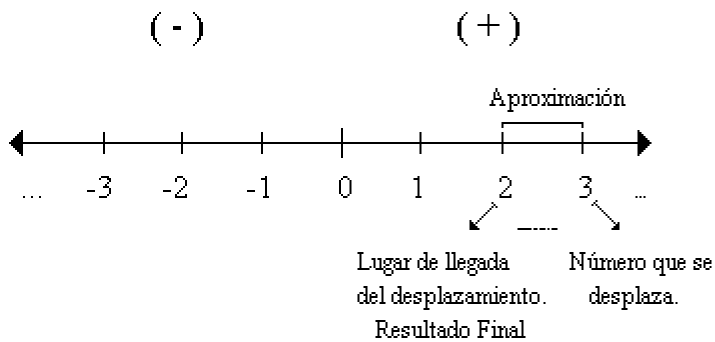
Sector de referencia en
Relación al Desplazamiento
↓
Número que se desplaza ← (3 + −1) → Lugares que se desplaza
↓
Aproximación

Ejemplo:

[(−8) + ($^{+}5$)] : Esta expresión se lee y entiende como: **menos ocho se aproxima 5 lugares al sector de los enteros positivos.**

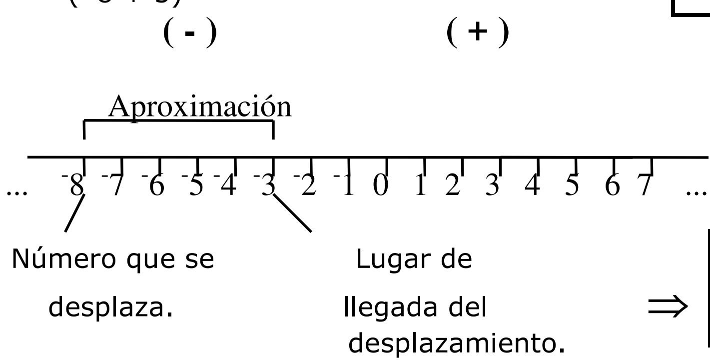
En la recta numérica podemos observar ambas situaciones.

a) $(3 + -1)$



3 + −1 = 2

b) $(-8 + 5)$



$\Rightarrow$ **−8 + 5 = −3**

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN EN Z.

a) CLAUSURA

$\forall$ a, b $\in$ Z $\rightarrow$ (a + b) $\in$ Z

b) CONMUTATIVIDAD

$\forall$ a, b $\in$ Z $\rightarrow$ a + b = b + a

Ejemplo: −5 + −3 = −3 + −5
−8 = −8

c) ASOCIATIVIDAD

$\forall$ a, b, c $\in$ Z $\rightarrow$ (a + b) + c = a + (b + c)

Ejemplo: (−5 + 6) + −3 = −5 + (6 + −3)
1 + −3 = −5 + 3
−2 = −2

d) POSEE ELEMENTO NEUTRO

$\forall\, a \in Z$ se cumple que $a + 0 = 0 + a = a$

Ejemplo: $-3 + 0 = 0 + -3 = -3$

e) TODO ELEMENTO TIENE INVERSO (OPUESTO)

$\forall\, a \in Z, \ni op(a) / \ a + op(a) = op(a) + a = 0$

Ejemplo: $5 + -5 = -5 + 5 = 0$

MULTIPLICACIÓN EN Z.

Para multiplicar dos enteros, debemos observar, si éstos son de igual o distinto signo, lo cual determinará el signo del resultado, a saber:

* Si son de **igual** signo, el resultado es **positivo** (+)

* Si son de **distinto** signo, el resultado es **negativo** (–)

En ambos casos se multiplican los valores absolutos de los factores:
Ejemplo:

$-3 \cdot -2 = 6$
$-5 \cdot 4 = -20$
$-3 \cdot 1 = -3$
$7 \cdot 2 = 14$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN Z.

a) CLAUSURA

$\forall\, a, b \in Z$, se cumple que $(a \cdot b) \in Z$

b) CONMUTATIVIDAD

$\forall\, a, b \in Z$, se cumple que: $a \cdot b = b \cdot a$

Ejemplos: $4 \cdot 2 = 2 \cdot 4$
$8 = 8$

c) ASOCIATIVIDAD

$\forall\, a, b, c \in Z$, se cumple que: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ejemplo: $(-3 \cdot 4) \cdot -5 = -3 \cdot (4 \cdot -5)$
$-12 \cdot -5 = -3 \cdot -20$
$60 = 60$

d) POSEE ELEMENTO NEUTRO

$\forall$ a $\in$ Z, se cumple que: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$
$a = a$

Ejemplo: $-5 \cdot 1 = 1 \cdot -5 = -3$
$-5 = -5$

e) PROPIEDAD ABSORBENTE DEL CERO

$\forall$ a $\in$ Z, se cumple que : $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Ejemplo: $2 \cdot 0 = 0 \cdot 2 = 0$
$-5 = -5$

f) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO DE LA ADICIÓN

$\forall$ a, b, c $\in$ Z, se cumple que : $a (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo: $-4\cdot(2 + -5) = -4 \cdot 2 + -4 \cdot -5$
$-4 \cdot -3 = -8 + 20$
$12 = 12$

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

Al operar distintas operaciones a la vez, se debe respetar el siguiente orden:

- Resolver los paréntesis.
- Realizar las potencias.
- Realizar multiplicaciones y/o divisiones de izquierda a derecha.
- Realizar adiciones y/o sustracciones de izquierda a derecha.

MÚLTIPLOS: Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando ese número por los números naturales.

Ejemplo: M(3) = {3, 6, 9, 12, 15…} Es un conjunto infinito.

DIVISORES: Un número es divisor de otro cuando la división del segundo por el primero es exacta.

Ejemplo: D(45) = {1, 3, 5, 9, 15, 45}. Es un conjunto Finito.

Observación: Ambos ejemplos se determinó solo los múltiplos y divisores positivos.

NÚMERO PRIMO: Es aquel que sólo tiene dos divisores: el 1 y él mismo número. En caso contrario lo llamamos **Número Compuesto**.

Ejemplo: el 3 es un número Primo. Ya que sus divisores son : D(3) = {1, 3}.

Observación: El número 1 no es ni primo ni compuesto.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Un criterio de divisibilidad es una regla que permite reconocer, sin hacer la división, si un número es o no divisible por otro número dado.

Criterio de Divisibilidad por…	**Enunciado**	**Ejemplo**
2	Un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es 0 ó un número par.	356 es divisible por 2 porque 6 es par.
3	Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3	1.524 es divisible por 3 porque 1 + 5 + 2 + 4 = 12 que es divisible por 3.
5	Un número es divisible por 5 si la cifra de sus unidades es 0 ó 5.	465 y 670 son divisibles por 5 porque terminan en 5 y 0 respectivamente.
9	Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 9.	765 es divisible por 9 porque 7 + 6 + 5 = 18 que es divisible por 9.
10 100 1000 …	Un número es divisible por 10 si la cifra de sus unidades es 0. Un número es divisible por 100 si las cifras de sus decenas y unidades son 0. Un número es divisible por 1000 si las cifras de sus centenas, decenas y unidades son 0.	120 es divisible por 10 porque termina en 10. 1.200 es divisible por 100 porque termina en 00. 12.000 es divisible por 1.000 porque termina en 000.
11	Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y las que ocupan lugar impar en el número dado, es 0 o un múltiplo de 11.	817.091 es divisible por 11 porque: (8 + 7 + 9) – (1 + 0 + 1) = 24 – 2 = 22 que es divisible por 11.

Observación: Si un número **n** es primo, sus únicos divisores son 1 y n.

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Descomponer un número en factores primos es escribirlo como el producto de números primos.

Ejemplo: Vamos a descomponer 132 en factores primos:

1°. Se divide el número por el divisor primo más pequeño, que en este caso es 2, por ser par:

132 : 2 = 66
0

2°. Se divide el cociente que hemos obtenido en el paso anterior por el menor divisor primo posible, que vuelve a ser 2:

66 : 2 = 33
0

3°. El cociente que hemos obtenido (33) ya no es par, así que probamos a ver si es divisible por el siguiente número primo: 3

33 : 3 = 11
0

4°. 11 es un número primo, luego su divisor primo es 11

11 : 11 = 1
0

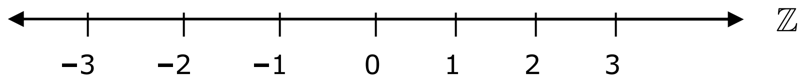
Nota: Cuando el último cociente es 1, se termina.

Luego la descomposición en factores primos de 132 es:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

VALOR ABSOLUTO.

Llamamos valor absoluto de un número a la **distancia**, que éste tiene respecto del cero; y el signo (+ ó –) indica si éste está a la derecha o izquierda del cero, de la siguiente forma:
–**3** : Es un número que se ubica a 4 unidades de distancia del cero y a la izquierda de éste.



Lo anterior se expresa así $|-3| = 3$ y se lee: Valor Absoluto de –3 es 3.
El valor absoluto de cualquier número **jamás** es negativo, dado que no existen distancias negativas.

El valor de cualquier número entero **a** se define de la siguiente forma:

$$|a| = \begin{cases} a\,, & \text{si } a > 0 \\ 0\,, & \text{si } a = 0 \\ -a\,, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Verifiquemos la definición con el siguiente ejercicio:

* $|5| = 5$ pues $5 > 0$; o, se ubica a 5 unidades a la derecha del cero.
* $|0| = 0$ pues $0 = 0$; o, se ubica en el punto cero.
* $|-7| = -(-7) = 7$ pues $-7 < 0$; o, se ubica a 7 unidades a la izquierda del cero.

VOCABULARIO MATEMÁTICO

$\forall$: para todo ; $\in$: pertenece a

Múltiplos: Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando ese número por los números naturales.

Divisores: Un número es divisor de otro cuando la división del segundo por el primero es exacta.

Número primo: Es aquel que sólo tiene dos divisores: el 1 y él mismo. En caso contrario lo llamamos compuesto.
El número 1 no es ni primo ni compuesto.

Criterio de divisibilidad: Un criterio de divisibilidad es una regla que permite reconocer, sin hacer la división, si un número es o no divisible por otro número dado.

Descomponer en factores primos: Descomponer un número en factores primos es escribirlo como el producto de números primos.

Máximo común divisor: El máximo común divisor de varios números es el mayor de sus divisores comunes. Abreviadamente se indica así: m.c.d. Se calcula multiplicando los factores comunes elevados al menor exponente.

Mínimo común múltiplo: El mínimo común múltiplo de varios números es el menor de sus múltiplos. Abreviadamente se indica así: m.c.m. Se calcula multiplicando los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Número entero: Los números enteros están formados por los números naturales (positivos), los números negativos y el cero.

Valor Absoluto: El valor absoluto de un número es el número de unidades que lo separan del cero. Por tanto, este valor es siempre positivo y se representa entre barras.

Opuesto de un número: El opuesto de un número entero es otro número entero con el mismo valor absoluto pero con distinto signo.