PREUNIVERSITARIO PREUTECH.
CURSO: NIVELACIÓN MATEMÁTICA.
PROCESO ADMISIÓN 2021.
DEPTO. MATEMÁTICA.
AÑO ACADÉMICO 2020.

PRUEBA DE TRANSICIÓN DE MATEMÁTICA

TALLER DE NIVELACIÓN N° 2

NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$

VERSIÓN 2020

TEMA: NÚMEROS RACIONALES.

- DEFINICIÓN NÚMERO RACIONAL.
- FRACCIÓN PROPIA E IMPROPIA.
- IGUALDA DE FRACCIONES.
- RELACIONES DE ORDEN.
- OPERATORIA EN Q.
- NÚMEROS DECIMALES.
- EJERCITACIÓN.

PROFESOR: CARLOS AGUAYO G.

DEFINICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$.

Los números racionales son todos aquellos números de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b números enteros y b distinto de cero. El conjunto de los números racionales se representa por la letra $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a,b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}.$$

FRACCIÓN PROPIA E IMPROPIA.

FRACCIÓN PROPIA.

Es cuando el numerador es menor que el denominador, en valor absoluto.

OBSERVACIÓN: toda fracción propia es menor que un entero.

FRACCIÓN IMPROPIA.

Es aquella en que el numerador es mayor o igual que el denominador, en valor absoluto.

OBSERVACIÓN:

Toda fracción impropia es mayor o igual que un entero, por tanto se puede expresar como **número mixto**.

Para expresar una **fracción impropia** en número mixto se debe dividir el numerador por el denominador. El cuociente es la parte entera y el resto es el numerador de la parte fraccionaria, y siempre se debe conservar el denominador.

Para llevar un número **mixto** a **fracción impropia** se debe multiplicar el denominador por la parte entera y a este resultado sumarle el numerador de la parte fraccionaria.

Entonces $A\frac{b}{c} = \frac{A \cdot c + b}{c}$, con $A \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Ejemplos:

- $\frac{3}{7}$ Fracción Propia.
- $\frac{9}{5}$ Fracción Impropia.
- $2\frac{3}{4}$ Número Mixto. $\Rightarrow$ $2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$ $\leftarrow$ Fracción Impropia.

RELACIONES DE ORDEN DE Q.

Para saber si dos racionales son iguales se debe aplicar:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

Ej. $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$, ya que $2 \cdot 24 = 3 \cdot 16$

$48 = 48$

Para saber cuando un racional es mayor que otro se pueden aplicar los siguientes criterios:

1°. Si dos o más racionales positivos tienen igual denominador, entonces el mayor de ellos será aquel que tenga mayor numerador.

2°. Si dos o más racionales positivos tienen igual numerador, entonces el mayor de ellos es aquel que tiene menor denominador.

3°. Para observar cuando un racional es mayor que otro se puede aplicar el producto cruzado.

$$\boxed{\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c,\ b \text{ y } d \text{ positivos}}$$

OBSERVACIÓN 1:

Si necesitamos ordenar varios racionales, son más convenientes los criterios 1° y 2°, pues si logramos igualar los denominadores o numeradores, mediante la amplificación o la simplificación, el orden quedará dado por los numeradores o los denominadores. El tercer criterio permite comparar sólo dos racionales por vez, este es recomendable cuando los elementos de los racionales son complicados.

OBSERVACIÓN 2:

Siempre es conveniente simplificar si es posible antes de operar. Cuando una fracción no se puede simplificar, se dice que dicha fracción es **irreductible**.

INTERCALAR NÚMEROS RACIONALES.

Entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos números racionales.

Ejemplo: Intercalar 3 números racionales entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

Tenemos que $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$; para intercalar un racional:

$$\frac{2}{3} < \frac{2+5}{3+6} < \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{7}{9} < \frac{5}{6}$$ repitiendo el proceso obtenemos

$$\frac{2}{3} < \frac{9}{12} < \frac{7}{9} < \frac{12}{15} < \frac{5}{6}$$ / simplificando

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$$

AMPLIFICAR Y SIMPLIFICAR UNA FRACCIÓN.

La amplificación y simplificación de fracciones permiten obtener fracciones equivalentes.

Amplificación:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}}$$, con $n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$

Ej. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$

Simplificación:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}}$$, con $n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$

(esto se puede hacer cuando el numerador y el denominador son múltiplos del mismo número).

Ej. $\frac{18}{36} = \frac{18 : 9}{39 : 9} = \frac{2}{3}$

OBSERVACIÓN:
Siempre es conveniente simplificar si es posible antes de operar. Cuando una fracción no se puede simplificar, se dice que dicha fracción es irreductible.

OPERATORIA ENTRE RACIONALES.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}}$$

Ej. $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{10 + 3}{15} = \frac{13}{15}$

$\frac{3}{8} - \frac{3}{12} = \frac{3 \cdot 3 - 3 \cdot 2}{24} = \frac{9 - 6}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

En este ejemplo se usó el mínimo común denominador, que es el mínimo común múltiplo entre los denominadores.

MULTIPLICACIÓN

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$$

Ej. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{21}$

DIVISIÓN:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Ej. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

$\frac{4}{7} : \frac{1}{14} = \frac{4}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{14}}{1} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{1} = 8$

En este ejemplo se simplificó cruzado el 7 y el 14

OBSERVACIÓN:

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m): El m.c.m entre dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.

Para obtener el m.c.m. de dos o más números, se puede hacer una tabla en la cual los dos o más números se van dividiendo por números primos comunes hasta que cada número queda totalmente descompuesto.

Ejemplo: El mínimo común múltiplo entre 6 y 8 es

$$\left.\begin{array}{cc|c} \mathbf{6} & \mathbf{8} & :2 \\ \hline 3 & 4 & :2 \\ 3 & 2 & :2 \\ 3 & 1 & :3 \\ 1 & & \end{array}\right\} \; 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{24}$$

NÚMEROS RACIONALES EN SU EXPRESIÓN DECIMAL.

Un **número decimal** es un número en que cada dígito, según su posición, indica la cantidad de unidades, decenas, décimas, centésimas, milésimas, etc., que contiene. Con una **coma** se separa la parte entera de la parte no entera del número.

Ej. $125{,}671 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$
$= 1$ centena $+ 2$ decenas $+ 5$ unidades $+ 6$ décimas $+ 7$ centésimas $+ 1$ milésima

Este número se lee: ciento veinticinco enteros, seiscientos sesenta y un milésimos

FRACCIÓN DECIMAL

Es una fracción cuyo denominador es una potencia entera de 10.

Ej. $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{179}{100}$ son fracciones decimales

La fracción $\frac{5}{8}$ se puede representar como fracción decimal, ya que

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000}$$

La fracción $\frac{2}{3}$ no puede ser representado por una fracción decimal, puesto que ninguna potencia entera de 10 es divisible por 3.

FRACCIÓN DECIMAL COMO NÚMERO DECIMAL

Toda fracción decimal se puede expresar como número decimal y vice-versa.

Ej.

Forma fraccionaria	Forma decimal	Se lee
$\frac{3}{10}$	0,3	tres décimos
$\frac{15}{1000}$	0,015	quince milésimos
$\frac{532}{100}$	5,32	cinco enteros, treinta y dos centésimos

FRACCIÓN A NÚMERO DECIMAL Y VICE-VERSA.

Las fracciones que no pueden ser representadas como una fracción decimal, sólo podrán transformarse a número decimal **dividiendo** el **numerador** por el **denominador**. Esto se cumple para cualquiera fracción.

Al dividir el numerador por el denominador, se tiene:

Decimales finitos: son aquellos que tienen una cantidad determinada de cifras en la parte decimal.

Ej. $\frac{3}{4} \rightarrow 3 : 4 = 0{,}75$

Todo decimal finito se puede llevar a fracción. Para ello se anota en el numerador el número sin coma, y en el denominador un uno con tantos ceros como cifras haya en la parte decimal.

Ejemplos: $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

Decimales infinitos periódicos puros: son aquellos que en su parte decimal tienen una o más cifras que se repiten indefinidamente. La cifra o el grupo de cifras que se repite se llama **período**.

Ejemplos: $0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$

$0{,}171717\ldots = 0{,}\overline{17}$

Todo decimal periódico puede representarse como una fracción. Para llevarlo a forma de fracción, en el numerador se anota el período y en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período.

Ejemplos: $0{,}333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$0{,}171717\ldots = \frac{17}{99}$

Si además del período aparece parte entera, en el numerador se anota el número sin coma y se le resta la parte entera y en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período.

Ej. $2{,}333\ldots = 2{,}\overline{3} = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

Decimales infinitos semiperiódicos: son aquellos que en su parte decimal además del período tienen una o más cifras que no se repiten (anteperíodo).

Ejemplos: $0,2333... = 0,2\overline{3}$

$0,12343434... = 0,12\overline{34}$

Todo decimal semiperiódico se puede llevar a fracción. Para ello en el numerador se anota el número sin coma menos el anteperíodo, y en le denominador se anotan tantos 9 como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras tenga el **anteperíodo**.

Ejemplos: $0,2333... = 0,2\overline{3} = \frac{23-2}{90} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$

$4,2333... = 4,2\overline{3} = \frac{423-42}{90} = \frac{381}{90}$

ORDEN EN LOS DECIMALES.

Si queremos comparar los decimales 35,678 y 35,876, comparamos primeramente las partes enteras. Si estas resultan ser iguales, entonces comparamos las partes decimales, empezando por las décimas, si estas son iguales, pasamos a las centésimas, si estas resultan ser iguales, pasamos a las milésimas y así sucesivamente, hasta lograr establecer la diferencia en alguna de sus partes. En el caso del ejemplo anterior, la décima del primer decimal resulta ser inferior (6) a la décima del segundo decimal (8), por lo tanto 35,678 < 35,876.

OPERATORIA ENTRE DECIMALES.

Para **sumar** o **restar** decimales estos deben ser ordenados de acuerdo a la coma.

Ej.
$$\begin{array}{r} 12,356 \\ +\ 103,54 \\ \hline 115,896 \end{array}$$

$\therefore$ 12,356 + 103,54 =115,896

Para **multiplicar** decimales, estos se multiplican igual como si fueran enteros, y en el resultado final se corre la coma, de derecha a izquierda, tantos lugares como cifras decimales hayan en los dos números que se multiplicaron.

Ej.

$$\begin{array}{r} \underline{2{,}35 \cdot 1{,}2} \\ 470 \\ \underline{235} \\ 2{,}820 \end{array}$$

2,820 , (la coma se corre 3 lugares hacia la izquierda)

$\therefore\ 2{,}35 \cdot 1{,}2 = 2{,}82$

Para **dividir** decimales, estos se deben amplificar por una potencia de 10, para que el divisor sea entero. Es decir, se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tanto lugares a la derecha como cifras decimales tenga el divisor. Si es necesario se agregan ceros al dividendo.

Ej. 4,6 : 0,23 (se amplifica por 100)

$$\begin{array}{l} 460 : 23 = 20 \\ 00 \\ 0 \end{array}$$

$\therefore\ 4{,}6 : 0{,}23 = 20$

OBSERVACIÓN:

Los decimales periódicos y semiperiódicos en general deben ser transformados en fracciones antes de operar. **No** es recomendable operar en la forma decimal.

DEFINICIONES:

1. El inverso aditivo (u opuesto) de es $\frac{a}{b}$ es $-\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, de modo que se cumpla que $\frac{a}{b} + \left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

2. El inverso multiplicativo (o recíproco) de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, con a y $b \neq 0$, de modo que se cumpla Que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

CUADRO RESUMEN

Operaciones con fracciones.			
Suma		**Resta**	
Con el mismo denominador Se suman los numeradores y se deja el mismo denominador $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$	**Con distinto denominador** Se deducen a común denominador y se suman $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$	**Con el mismo denominador** Se restan los numeradores y se deja el mismo denominador $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$	**Con distinto denominador** Se deducen a común denominador y se restan $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{7}{12}$
Multiplicación		**División**	
Se multiplican los numeradores y denominadores entre sí $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$		Multiplicamos los términos de las fracciones en cruz $\frac{4}{5}:\frac{3}{7}=\frac{4\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{28}{15}=1\frac{13}{15}$	

VOCABULARIO MATEMÁTICO

Fracción: Una fracción es una parte de un total. Al escribirla ponemos dos términos: numerador y denominador.

Numerador: número de partes que se toman de la unidad.

Denominador: número de partes iguales en que se divide la unidad.

Fracciones equivalentes: Dos fracciones son equivalentes si representan la misma parte de la unidad. Si se multiplica o divide los dos términos de una fracción por un mismo número, distinto de cero, se obtiene una fracción equivalente a la primera. Si multiplicas, se dice que estas amplificando la fracción. Si divides, se dice que estas simplificando la fracción.

Fracción irreducible: Si una fracción no se puede simplificar más, se dice que es una fracción irreducible.